

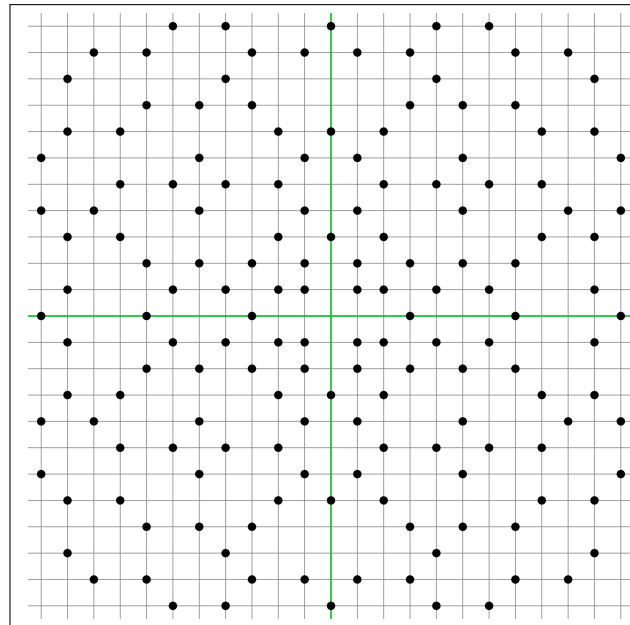
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik*

Dr. Moritz Firsching

Sommersemester 2017

Blatt 3

Donnerstag, 23.II.2017



Primelemente in $\mathbb{Z}[i]$

Aufgabe 9 (Eindeutigkeit der Zahlendarstellungen)

Diskutieren Sie in welchen der Ihnen bekannten Zahlenbereiche eine Darstellung der Elemente (also der Zahlen) eindeutig ist. Wie könnte man in den Fällen, in denen die Darstellung nicht eindeutig ist, einen eindeutigen Repräsentanten erhalten?

Aufgabe 10 (Gaußsche Zahlen)

Wir betrachten den Ring der Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Da $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$, ist eine Multiplikation zweier Elemente in $\mathbb{Z}[i]$.

1. Zeigen Sie: Wenn $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, dann ist auch das Produkt $x \cdot y$ in $\mathbb{Z}[i]$
2. Für welche $x \in \mathbb{Z}[i]$ gibt es ein $y \in \mathbb{Z}[i]$, so dass $x \cdot y = 1$? (Diese Elemente nennt man „Einheiten“)
3. Finden sie eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$, so dass $p = x \cdot y$ für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, die keine Einheiten sind.

Aufgabe 11 (Zahlendarstellungen mit unterschiedlichen Basen)

1. Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

Basis	α	β	γ	δ	ε
2		1001001001			
3					202021
7				333	
10			100		
16	1A3				

2. Es sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die Zahl 1001_b keine Primzahl ist. (Hinweis: Manche Polynome lassen sich faktorisieren!)

Aufgabe 12 (Periodenlänge bei Dezimaldarstellungen rationaler Zahlen)

Berechnen Sie die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{n}$ für $n = 2, 3, \dots, 20$ auf 30 Stellen genau. Diese Zahlen sind alle rational, daher wiederholen sich Ziffern oder Ziffernblöcke irgendwann. Was ist jeweils die Länge der sich wiederholenden Ziffernblöcke? Gibt es eine Gesetzmäßigkeit? Finden Sie die Dezimaldarstellung von $\frac{404042}{333333}$.