Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik*

Dr. Moritz Firsching

Sommersemester 2017

Blatt 4 Donnerstag, 2.III.2017

Leonhard Euler im Portrait von Emanuel Handmann, 1753

Aufgabe 13 (rationale Potenz irrationaler Zahlen)

Beweisen Sie oder widerlegen Sie: es gibt zwei irrationale Zahlen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass $a^b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 14 (Papiergrößen)

Ein rechteckiges Blatt mit Seitenlängen a und b habe den Flächeninhalt $1\,000\,000$ und das Seitenverhältnis $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Berechnen Sie a, b sowie $2^{-\frac{k}{2}}b$ für $k \in 1, 2, 3, 4$ auf einige Dezimalstellen. Zeigen Sie, dass wenn a und b das Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ haben, dass dann auch b und $\frac{a}{2}$ in diesem Verhältnis stehen. Vergleichen Sie mit der folgenden Tabelle von Papiergrößen nach ISO 216 in *mm*.

DIN A0	DIN A1	DIN A2	DIN A3	DIN A4	DIN A5	DIN A6
841×1189	594×841	420×594	297×420	210×297	148×210	105×148

Aufgabe 15 (Machins Formel)

Für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$ und $x \neq i$ und $x \neq -i$ läßt sich arctan als konvergente Reihe wie folgt darstellen:

$$\arctan(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots.$$

Es folgt:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

Berechnen Sie die ersten paar Partialsummen dieser unendlichen Reihe.

Rechnen Sie in den komplexen Zahlen: $(5+i)^4 \cdot (239 - i)$.

Nutzen Sie die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

benannt nach John Machin, zusammen mit der Reihenentwicklung von arctan um die ersten drei Dezimalstellen von π zu berechnen. Wie viele Summanden von $\arctan \frac{1}{5}$ und $\arctan \frac{1}{239}$ werden mindestens dafür benötigt?

Für die Rechnungen in dieser Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.