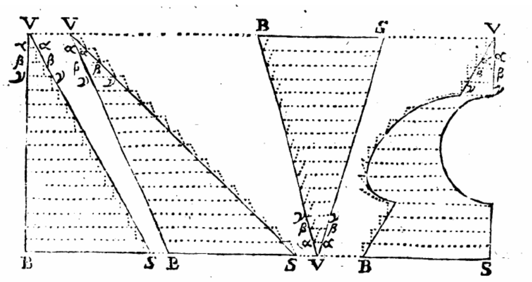
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik*

Dr. Moritz Firsching

Sommersemester 2017

Blatt 6 Donnerstag, 16.III.2017

SUppono in limine (juxtà Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium*) Planum quodlibet quaſi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem ſingulorum altitudo ſit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, ſive aliquota pars infinite parva; (eſto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium ſimul altitudo æqualis altitudini figuræ.



rithmeticè proportionalium, quarum minima eſt punctum V (verticis nimirum) maxima verò eſt B S baſis Trianguli.

Atq; idem continget ſi infinitis illis rectis ſupponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum ſingulorum altitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt ſcilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cùm enim æque-alta ſint, ſunt & baſibus proportionalia.

Hæc

Zwei Stellen aus John Wallis, *De sectionibus conicis*, 1655. Man beachte den Satz in Klammern: „esto enim nota ∞ numeri infiniti“.

Aufgabe 19 (Satz von Cantor)

Es sei M eine Menge. Die Potenzmenge von M ist definiert als

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subset M\}.$$

Beweisen Sie: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Gehe Sie dabei wie folgt vor:

1. Finden Sie eine injektive Abbildung $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ um zu zeigen, dass $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
2. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$ geben kann. Dafür ist es nützlich, die Menge aller Elemente $m \in M$ zu betrachten, so dass m nicht in $g(m)$ enthalten ist.

Aufgabe 20 (Räuber und Gendarm)

1. Ein Räuber R hat sich auf einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ versteckt. Der Gendarm versucht den Räuber zu fangen indem er bei jedem Einsatz in einem Punkt in der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach dem Räuber sucht.
   Kann der Gendarm seine Einsätze so planen, dass er den Räuber auf jeden Fall fängt? (Ein solcher Einsatzplan kann als eine Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aufgefasst werden.)
2. Ein anderer Räuber S befindet sich an einem Startpunkt $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Jedesmal nachdem der Polizist einen Einsatz fährt, bewegt er sich in eine vorher fest gewählte Fluchtrichtung $(v, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zunächst befindet sich der Räuber im Punkt (a, b), dann im Punkt $(a + v, b + w)$, dann im Punkt $(a + 2v, b + 2w)$ und so weiter.
   Kann der Gendarm seine Einsätze so planen, dass er den Räuber auf jeden Fall fängt?

Aufgabe 21 (Mächtigkeiten)

Ordnen Sie die folgenden Mengen nach ihrer Mächtigkeit:

(i) $\mathbb{N}$

(ii) $\mathbb{C}$

(iii) $\{1\}$

(iv) $[8] := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(v) $Q := \{q^2 \mid q \in \mathbb{Z}\}$

(vi) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(vii) $\mathbb{P} := \{p \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ prim}\}$

(viii) $\mathbb{I} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{P} \text{ und } b - a = 2\}$

(ix) $\mathbb{Q}[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Q}, \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$

(x) $\mathbb{A} := \{a \mid a \in \mathbb{C} \text{ so dass } p(a) = 0 \text{ für ein } 0 \neq p \in \mathbb{Q}[x]\}$

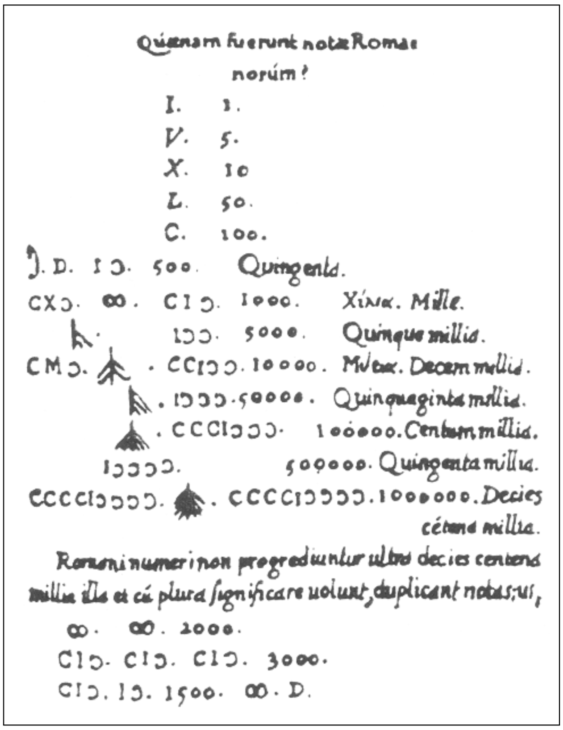
(xi) $\mathbb{R}$

(xii) $\mathbb{Q}^7$

(xiii) $\mathbb{R}^6$

(xiv) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

(xv) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))))$



Quaenam fuerunt notae Romanorum?

I. 1.
V. 5.
X. 10
L. 50.
C. 100.
D. IↃ. 500. Quingenta.
CXↃ. ∞. CIↃ. 1000. Χίλια. Mille.
IↃↃ. 5000. Quinque millia.
CMↃ. CCIↃↃ. 10000. Μύρια. Decem millia.
IↃↃↃ. 50000. Quinquaginta millia.
CCCIↃↃↃ. 100000. Centum millia.
IↃↃↃↃ. 500000. Quingenta millia.
CCCCIↃↃↃↃ. CCCCIↃↃↃↃ. 1000000. Decies centena millia.

Romani numeri non progrediuntur ultra decies centena millia illa et cum plura significare volunt, duplicant notas; ut,

∞. ∞. 2000.
CIↃ. CIↃ. CIↃ. 3000.
CIↃ. IↃ. 1500. ∞. D.

Johann Thomas Freigius, 1582