Übungsaufgaben zur Vorlesung *Panorama der Mathematik*

Dr. Moritz Firsching

Sommersemester 2017

Blatt 9 Donnerstag, 6.IV.2017

wo r sicher den Werth n nicht erreicht. Da nun nach der Euler'schen Summenformel (1a) des vor. Abschnitts

$$\sum_1^n \frac{1}{k} = E + \log n + \frac{1}{2\,n} - \cdots$$

ist, findet sich

(11) $$\tau(n) = n \log n + O(n),$$

wenn wir durch das Zeichen $O(n)$ eine Grösse ausdrücken, deren Ordnung in Bezug auf n die Ordnung von n nicht überschreitet; ob sie wirklich Glieder von der Ordnung n in sich enthält, bleibt bei dem bisherigen Schlussverfahren dahingestellt.

Erste gedruckte Verwendung der O-Notation. Paul Bachmann, *Die analytische Zahlentheorie*, S. 401, 1894. In der ersten Formel für die harmonische Reihe bezeichnet E, die Euler-Mascheroni-Konstante: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = E + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Aufgabe 28 (Rechnungen mit O)

Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Mit $O(f(n))$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dass es Konstanten M und n_0 gibt, so dass

$$|g(n)| \leq M|f(n)|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall schreiben wir $g(n) = O(f(n))$.

Man zeige:

(i) $f(n) = O(f(n))$.

(ii) Für $c \in \mathbb{R}$ gilt: $c \cdot f(n) = O(f(n))$.

(iii) Wenn $a(n) = O(b(n))$ und $b(n) = O(c(n))$, dann folgt $a(n) = O(c(n))$.

Aufgabe 29 (Exponentielles Wachstum)

Man zeige, dass für kein $k \in \mathbb{N}$ ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $e^x \leq Mx^k$ für beliebig große Werte $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 30 (Stirlingformel)

Die Stirlingformal besagt in ihrer einfachsten Form:

$$n! \simeq n^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot$$

Damit läßt sich zum Beispiel 8! abschätzen:

$$\begin{aligned} 8! \simeq 8^8 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 8} \cdot \frac{1}{e^8} = (2^3)^8 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{e^8} &= 2^{26} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{e^8} \\ &\approx 67108864 \cdot 1{,}77245385 \cdot 0{,}00033546 \approx 39902{,}08 \end{aligned}$$

Vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Wert von 8!: Wie groß ist der relative Fehler?

Eine genauere Abschätung ist durch

$$n! = n^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + O(\frac{1}{n^5})\right)$$

gegeben. Nutzen Sie die Formel

$$n! \simeq n^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \left(1 + \frac{1}{12n}\right)$$

zusammen mit der obigen Rechnung, um 8! abzuschätzen. Wie groß ist jetzt der relative Fehler?

Die Aufgaben 1) - 16) sind einschließlich der Probe *ohne Taschenrechner* zu lösen; es sind jeweils alle Lösungen anzugeben:

1) $\frac{20x+2}{6x+6} - 1 = \frac{6x-4}{2x+2}$

2) $2 \cdot sin\, 2x = tan\, x$

3) $\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} = 2$

4) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = 3\,\frac{x-3}{x^2-9}$

5) $\sqrt{14+x} + \sqrt{11+x} = \frac{6}{\sqrt{14+x}}$

6) $15^{\,3x-7} = \sqrt[3]{225^{\,2x+5}}$

7) $\sqrt{x - \sqrt{8x}} = \sqrt{6}$

8) $\frac{3x}{\frac{x}{3} + \frac{3}{x}} = 8$

9) $\frac{x+5}{x-7} - \frac{x-7}{x+5} = \frac{3}{2}$

10) $625^{\frac{12x+7}{x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{x}}$

11) $64^{\,x^2-2} = \frac{1}{4} \cdot 4^{3x+1}$

12) $\frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}} = 5$

13) $7 \cdot \sqrt{9^x} = 3^{7x-8} + 4 \cdot 3^x$

14) $1000^x - 2 \cdot 100^x = 3 \cdot 10^x$

15) $\sqrt{x\sqrt{x} - x} + \sqrt{x} = x$

16) $\sqrt{8x \cdot \sqrt[3]{8x}} - \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{27}{4}$

Aufgaben „Mittelstufen-Niveau“ aus einem „Brandbrief“, der vor kurzem im Tagesspiegel erschien: http://bit.ly/2oDbJJg. Siehe auch den begleitenden Artikel http://bitly.com/2p1iFfQ sowie eine Stellungnahme von DZLM: http://bit.ly/2nE8tZE